

Od opisu pogody do gier planszowych: łańcuchy Markowa w akcji

Żywilla Fechner

Instytut Matematyki PŁ
zywilla.fechner@p.lodz.pl

20 lutego 2024

Plan spotkania

O pogodzie słów kilka

Łańcuchy Markowa - co to takiego.

Wędrówka pingwinów

Proces Galtona-Watsona

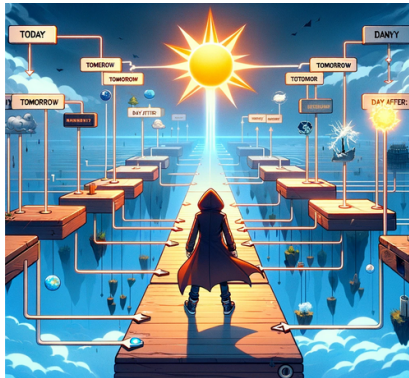
Pogoda: twoja codzienna przygoda

- ▶ Pogoda to jak scena z gry: zmienia się i wpływa na wszystko wokół.
- ▶ Elementy pogody: słońce, deszcz, wiatr to nasze codzienne wyzwania.
- ▶ Czasami następuje niespodziewany zwrot akcji: trudno przewidzieć, co przyniesie kolejny dzień.



Matematyka: Supermoc w przewidywaniu (pogody)

- ▶ Pogoda jako kolejne poziomy w grze: każdy dzień to nowy poziom, zależny tylko od tego, jakie są aktualne warunki atmosferyczne
- ▶ W świecie pogody: dzisiejsza *scena* w grze decyduje, co czeka nas jutro.
- ▶ Na przykład, jeśli dzisiaj mamy *level słoneczny*, jest większa szansa, że kolejny dzień też przyniesie słońce.



Jak to działa?

- ▶ Wyobraź sobie świat gry, gdzie masz tylko dwa poziomy: Słońce i Deszcz.
- ▶ Każdy ruch w grze ma swoje szanse: 70%, że poziom Słońce przeniesie Cię do kolejnego poziomu Słońce, i 30%, że trafisz na poziom Deszcz.
- ▶ Takie są zasady gry: używając tych szans, próbujesz przewidzieć, jaki będzie następny poziom.
- ▶ Jak w strategii gry, planujesz swoje ruchy (czyli dni), wykorzystując matematykę jako swoją supermoc.



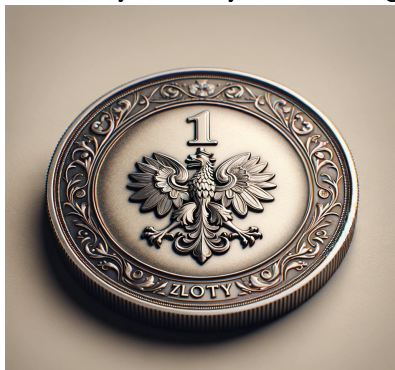
Prawdopodobieństwo: Twoja matematyczna mapa skarbów

- ▶ Prawdopodobieństwo to jak matematyczny kompas w grze komputerowej, pokazujący szanse na znalezienie skarbu lub wpadnięcie w pułapkę.
- ▶ Myśl o rzucie monetą: ma on 50/50 szanse na orła lub reszkę, podobnie jak twoje szanse na wybór właściwej ścieżki w grze.
- ▶ Prawdopodobieństwo to twoje narzędzie do podejmowania decyzji, gdy nie jesteś pewien co cię czeka za rogiem - czy to w grze, czy w życiu.



Wyzwanie monety: Twoje szanse 50/50

- ▶ Wyobraź sobie grę, w której każdy ruch zależy od rzutu monetą. To jak wybór ścieżki w grze przygodowej – orzeł czy reszka decyduje o twoim kolejnym kroku.
- ▶ Każdy rzut to równa szansa, $1/2$, na jedną z dwóch możliwości. To jak stanie na rozdrożu, mając dwie ścieżki przed sobą.
- ▶ Wyobraźmy sobie tabelę wyników, gdzie każdy rzut rejestrujemy jak punkt w grze, pokazując, że matematyka to nie tylko liczby, ale i strategia.



Wynik	Prawdopodobieństwo
Orzeł	$1/2$
Reszka	$1/2$

Prawdopodobieństwo czy szansa: Co obstawiasz?

- ▶ W życiu codziennym często używamy wyrażen takich jak *możliwość deszczu* lub *szanse na wygraną*, jednak w matematyce te pojęcia mają swoje specyficzne znaczenia i są od siebie różne.
- ▶ Prawdopodobieństwo to sposób na wyrażenie, jak prawdopodobne jest wystąpienie pewnego zdarzenia. Np. wylosowanie jednej karty spośród trzech ma prawdopodobieństwo $1/3$.
- ▶ Szansa, określa stosunek prawdopodobieństwa, że coś się wydarzy, do prawdopodobieństwa, że się nie wydarzy. Na przykład, mówiąc, że szansa na deszcz wynosi 1 do 3, sugerujemy, że na jeden dzień z deszczem przypada trzy dni bez deszczu.

Prawdopodobieństwo i szansa: karty

Wybierając jedną kartę z trzech, *prawdopodobieństwo* wylosowania czerwonego asa wynosi 33,3%, ponieważ jeden z trzech asów jest czerwony. Natomiast *szansa* na wylosowanie czerwonego asa wobec niewylosowania go to 1 do 2, ponieważ na jednego asa czerwonego przypadają dwa asy czarne. **W tej prezentacji używamy pojęcia “prawdopodobieństwo” i “szansa” wymiennie rozumiejąc je to jako “prawdopodobieństwo częstościowe”.**



Łańcuchy Markowa: Jak to działa w grach i życiu

- ▶ Co to jest? Myśl o łańcuchu Markowa jak o grze planszowej, gdzie każdy ruch przenosi cię na nowe pole, a to, co się stanie, zależy tylko od pola, na którym jesteś teraz.
- ▶ Kluczowa zasada: Tylko terażniejszość się liczy! Jak w grze, gdzie kolejny *level* zależy od decyzji podjętych w bieżącym momencie, nie od całej historii gry.
- ▶ Gdzie to znajdziesz? Od prognozowania pogody, przez zmiany na giełdzie, po decyzje w twoich ulubionych grach planszowych – łańcuchy Markowa są wszędzie!



Łańcuchy Markowa: Twoje decyzje rysują mapę gry

- ▶ Macierz przejścia: Wyobraź sobie, że każdy Twój wybór w grze to przeskoczenie na nowe pole. Macierz przejścia to tabela, która pokazuje, jakie masz szanse na każdy skok.
- ▶ Jak to działa? Jeśli na planszy jest słonecznie, macierz mówi nam, jakie jest prawdopodobieństwo, że następnym razem trafisz na deszczową kratkę.
- ▶ Przykład z życia: Tak jak decydując się dziś na naukę zamiast gry, wpływasz na swoje jutrzejsze wyniki – bez patrzenia wstecz na poprzednie dni.



Księga Zaklęć: prawdopodobieństwa przejścia

- ▶ Twoja Księga Zaklęć mówi, jakie są szanse na skuteczność każdego zaklęcia.

Dzisiaj/Jutro	S	D
S	0.7	0.3
D	0.4	0.6

Tablica: Szansa na dzisiejsze i jutrzejsze zaklęcia

- ▶ Na przykład, jeśli dziś rzucisz zaklęcie Słoneczne (S), twoja księga mówi, że jutro z 70% szansą będzie słonecznie.

Prawdopodobieństwo warunkowe: dzisiejsza wiedza ma znaczenie

- ▶ Prawdopodobieństwo warunkowe: jak dzisiejsza wiedza wpływa na nasze decyzje.
- ▶ W naszej grze pogodowej, jeśli dzisiaj jest słonecznie, czyli warunek, masz magiczną kulę, która mówi, że jutro też będzie słonecznie z siłą 70%.

Jeśli dzisiaj jest słonecznie:

70% szans na słoneczne jutro

30% szans na deszczowy jutro

Jeśli dzisiaj jest deszczowo:

40% szans na słoneczne jutro

60% szans na deszczowe jutro

Prawdopodobieństwo w świecie gier

- ▶ W królestwie gry pogodowej, suma wszystkich możliwych zaklęć na każdy dzień musi tworzyć całą moc magiczną (1 czyli 100%).
- ▶ To jak w grze, gdzie każdy ruch otwiera przed tobą nowe drzwi, ale zawsze musisz wybrać dokładnie jedną ścieżkę.

Dla słonecznego dzisiaj:

$$\text{Szansa na słoneczne jutro} + \text{Szansa na deszczowe jutro} = 1$$

Dla deszczowego dzisiaj:

$$\text{Szansa na słoneczne jutro} + \text{Szansa na deszczowe jutro} = 1$$



Gra pogodowa: podsumowanie

- ▶ Prognozowanie pogody to jak gra, gdzie każdy dzień to nowy poziom.
- ▶ W tej grze, to co się działo w przeszłości (oprócz wczoraj) nie wpływa na wyzwania, które spotkasz dzisiaj.
- ▶ Matematycy nazywają taką grę łańcuchem Markowa o dwóch stanach: słonecznie i deszczowo, a księgę zakłęb macierzą przejścia.



Wędrówka pingwinów - zasady gry

- ▶ Plansza z określoną liczbą pól, gdzie pingwiny (gracze) muszą dotrzeć z punktu startowego do domu, poruszając się zgodnie z rzutami kostką.
- ▶ Pierwszy pingwin, który dotrze do domu, wygrywa.
- ▶ Gracze rzucają kostką (1-6) i przesuwiają swojego pingwina o liczbę pól wskazaną przez kostkę. Ruch odbywa się zgodnie z kierunkiem strzałek na planszy.



Wędrówka pingwinów - pola specjalne

- ▶ **Lodowa Przepawa:** Pole, które skraca drogę, ale wymaga rzutu kostką. Na 1 lub 2 pingwin cofa się do *Bazy Startowej*, na 3-6 przechodzi dalej.
- ▶ **Przerębel:** Pole, na którym pingwin musi poczekać jedną turę, zanim będzie mógł kontynuować podróż.
- ▶ **Prąd Morski:** Pole, które automatycznie przesuwa pingwina do przodu o dodatkowe 2 pola.
- ▶ **Dom:** Ostateczny cel, gdzie pingwiny kończą swoją podróż.



Wędrowka pingwinów - Stan Pochłaniający

- ▶ Stan, z którego nie można wyjść po jego osiągnięciu.
- ▶ *Dom*: gdy pingwin raz dotrze do domu, gra dla niego się kończy.



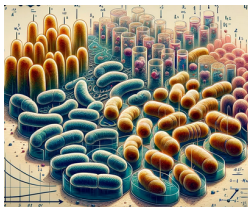
Stan przejściowy

- ▶ Stan przejściowy (chwilowy) - stan, do którego jest możliwy powrót po pewnym czasie.
- ▶ *Lodowa Przeprawa* jako stan przejściowy (można do niego wrócić)
- ▶ *Baza Startowa* jako stan przejściowy (pingwiny mogą wracać do niego na skutek instrukcji z pola).



Co to jest proces Galtona-Watsona?

- ▶ Wyobraźmy sobie kolonię bakterii na pożywce w laboratorium. Każda bakteria może się podzielić, tworząc dwie nowe komórki.
- ▶ Jak szybko liczba bakterii wzrośnie, jeśli każda z nich podzieli się w określonym czasie?
- ▶ Każdy etap podziału bakterii reprezentuje nowy etap w procesie rozmnażania, który możemy analizować za pomocą modelu matematycznego, podobnego do Procesu Galtona-Watsona, ale dostosowanego do charakterystyki rozmnażania przez podział.
- ▶ Proces Galtona-Watsona jest "bezpamięciowy": przyszłe pokolenia zależą tylko od obecnego pokolenia, a nie od historii wcześniejszych pokoleń.



Co łączy pogodę, pingwiny i populację bakterii?

- ▶ Własność Markowa
- ▶ Różne kategorie stanów: pochłaniający, przejściowy itp.
- ▶ Prawdopodobieństwa zmiany stanów.



Prawie na zakończenie

Wszystkie ilustracje zostały stworzone przez DALL·E, narzędzie AI OpenAI

Więcej wiedzy:

Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel, “Wprowadzenie do teorii prawdopodobieństwa”, SCRIPT, Warszawa, 2010.

Zapraszamy na studia: Matematyka Stosowana lub Aktuariat i Analiza Finansowa

Łańcuchy Markowa oraz szeregi czasowe omawiane są m.in. na kursie: *Wprowadzenie do szeregów czasowych* (semestr 4)

Dziękuję za uwagę!

Kontakt

zywilla.fechner@p.lodz.pl